1. Дан куб, каждая грань которого – это клетчатое поле размером 2015 на 2015
клеток. В центре одной из граней стоит пешка. Данил и Максим передвигают пешку по клеткам куба. Данил может ходить только на соседнюю по стороне клетку (разрешается переходить на другую грань, если клетки соседние по стороне), а Максим может поставить пешку в любую клетку. Пешка красит за собой клетки. На закрашенную клетку пешку двигать нельзя. Изначальная клетка (центр грани) закрашена. Данил ходит первым. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре обоих?

Решение. Ответ: Данил выигрывает.
Приведём выигрышную стратегию для Данилы.
Число клеток на поверхности чётно (равно 2015*2015*6).
Разобьём всю поверхность куба на доминошки; доминошки не пересекаются и покрывают весь куб. Пример разбиения приводить не будем. Легко видеть, что такие примеры есть. Школьники, которые написали такое решение должны приводить пример.
В начале хода Данилы пешка стоит в какой-то доминошке. Данила ходит во вторую клетку доминошки. Если Данила до этого действовал в соответствии с этой стратегией, то вторая клетка доминошки не закрашена и сделать в неё ход можно.
Очевидно, что последний ход сделает Данила - хотя бы потому, что он всегда может сделать ход.

Критерии
+- - предъявлена верная стратегия без примера разбиения куба на домношки.

2. Дан треугольник ABC, точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, AC, AB соответственно. Докажите, что три прямые, проходящие через эти точки и параллельные биссектрисам противолежащих углов, пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть эти прямые - a,b,c соответственно.
Рассмотрим четырёхугольник $A\,C\_1\,A\_1\,B\_1$. Он является параллелограммом, т.к. $C\_1\,A\_1$ и $A\_1\,B\_1$ - средние линии в

треугольнике ABC. Проведём биссектрису угла A и прямую a. Из параллельности этих двух прямых и того факта, что $A C_1 A_1 B_1$ - параллелограмм, следует, что a - биссектриса угла $C_1 A_1 B_1$. Аналогично, b и c так же являются биссектрисами треугольника $A_1 B_1 C_1$,
а биссектрисы пересекаются в одной точке.

Критерии
-+ - написано, что $A C_1 A_1 B_1$ - параллелограмм (или один из двух аналогичных четырёхугольников).
-+ - указано без доказательства, что *a* - биссектриса угла C_1 A_1 B_1, при этом есть верные рассуждение про гомотетию.

3. В гномьем клане некоторые знакомы между собой. Каждый гном владеет
некоторым количеством монет. Днём каждый гном узнаёт, сколько монет у каждого из его знакомых. Вечером он отдаёт по монете каждому из знакомых, кто днём был богаче него. Гном не может отдать больше, чем у него есть (например, нищий гном ничего не отдаёт). Если у гнома днём было меньше монет, чем количество знакомых богаче, чем он, то он сам решает, кому отдавать монеты. Докажите, что, начиная с какого-то дня, гномы прекратят передавать друг другу монеты.

Решение. Докажем требуемое утверждение индукцией по количеству гномов.
База - один гном; утверждение очевидно.
Шаг - пусть утверждение верно для любого клана из n гномов, докажем его для любого клана из $n+1$ гномов.
Рассмотрим произвольный клан из $n+1$ гномов и то, как они менялись монетами. Пусть a_{ij} - число монет у гнома номер i на в день номер j. Среди всех чисел a_{ij} есть макимальное - так как все a_{ij} натуральны и ограничены сверху суммарным количеством монет в клане. Пусть a_{kp} - одно из максимальных чисел.
Тогда, начиная с дня номер p, гном номер k не будет никому давать монеты и ни у кого получать монеты. Действительно: гном номер k может отдать монеты, только если найдётся гном, у которого больше монет. А такого гнома никогда не найдётся из максимальноси a_{kp}. Гном номер k не может получить монеты,

потому что если ему кто-то отдаст монеты, то число монет у гнома номер k станет больше a_kp, что так же противоречит максимальности a_kp.
Начиная со дня номер p, будем рассматривать всех гномов, кроме гнома с номером k, как клан из n гномов. Это корректно, так как они не получают и не отдают монеты гному с номером k. По предположению индукции, начиная с каого-то дня, гномы в этом новом клане перестанут передавать друг другу монеты.

Критерии
-+ - рассмотрен гном с максимальным a_kp.
+/2 - доказано, что гном с максимальным a_kp не участвует в обменах начиная с дня номер p.

4. На доске написаны числа 1/1, 1/2, 1/3, 1/4, ... 1/100.
Разрешается стереть любые два числа a, b и написать вместо них ab+a+b ,
 затем поступить так же с какими-то двумя из оставшихся, и так далее. Какое число может остаться последним?

Решение. Если бы вначале на доске было написано не сто, а три числа: a,b,c, то в конце на доске было бы написано число abc+ab+bc+ac+a+b+c. То есть сумма всех возможных мономов, составленных из чисел a,b,c, взятых не больше, чем по одному разу.
В случае, когда на доске написано сто чисел. Легко видеть, что последним на доске останется число, представимое в виде суммы (2^100)-1 различных мономов вида (1/a_1)*(1/a_2)*....(1/a_k) для всевозможных натуральных чисел k \in [1,100] и a_i \in [1,100], при этом a_i<a_i+1 для всех i. Школьники должны будут это доказывать.

Теперь заметим, что эта сумма представима в виде (1+1/1)*(1+1/2)*(1+1/3)*...*(1+1/100) - 1.
Преобразуем её: (1+1/1)*(1+1/2)*(1+1/3)*...*(1+1/100) - 1 = (2/1)*(3/2)*(3/4)*...*(101/100) - 1 = 101-1 = 100.

Критерии
+/2 или -+ - доказано, что последнее оставшееся число представимо в виде правильной суммы мономов.
+- - замечено, что эта сумма равна (1+1/1)*(1+1/2)*(1+1/3)*...*(1+1/100) -

1.

5. На сколько частей могут делить плоскость 7 различных касательных к данной
окружности? Приведите примеры для всех ответов и докажите, что других не существует.
Решение. 26,27,28,29. Чтобы получить правильный ответ, следует заметить, что можно рассмотреть случаи попарной параллельности нескольких прямых. Например, нет параллельных, одна пара параллельных, две пары паралллельных, три пары параллельных.
Критерии. -+ - неполный перебор, получен частично-правильный ответ.
± - верный ответ, но присутствует ошибка при разборе случаев

6. Слова языка роботов планеты Шелезяка — последователь-ности стрелочек "вверх", "вниз", "влево" и "вправо", причём две противонаправ-
ленные стрелочки не могут стоять рядом. Учитель написал на доске 1000000
слов этого языка. Четыре ученика переписывают слова к себе в тетрадь, делая
следующие изменения: ученик U приписывает перед словом стрелочку вверх,
а если это запрещено (слово начинается с "вниз"), то убирает это первое "вниз",
ученики D, L, R делают всё то же самое, только приписывают соответственно
1 стрелку вниз, влево или вправо, и вычёркивают первый символ, если он ока-
зался "вверх", "вправо", "влево". Докажите, что в одной из четырёх тетрадей
минимум половина (500000) слов не будет встречаться среди слов на доске.

Решение. Разобьём слова, написанные на доске на 4 класса U, D, L, R согласно
первой букве (будем маленькими буквами u, d, l, r обозначать число элементов
в них, $u + d + l + r = 1000000$). Тогда в тетради ученика U будет

написано
$u + l + r$ слов, начинающихся на “вверх” (ибо к любому слову не из класса D он
припишет “вверх”). Значит, если у него в тетради содержится N_u новых слов, то
$u + l + r \le u + N_u$. Написав три аналогичных неравенства и сложив их вместе,
получим, что $3(u + d + l + r) \le (u + d + l + r) + (N_u + N_d + N_l + N_r)$, то есть $N_u + N_d + N_l + N_r$ не меньше 2000000.
Комментарий. Речь, конечно, идёт о несократимых словах в свободной группе
с двумя образующими. Тогда утверждается, что какое бы (конечное) подмно-
жество в этой группе мы не взяли, при его умножении на a, b, a^{-1}, b^{-1} хотя бы раз мы получим сильно другое множество.
Критерии.